EPFL - Printemps 2025 | Alexis Michelat
Algèbre linéaire avancée II Section de Physique | **Exercices**
Série 7 | 3 avril 2025

Exercice 1. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel réel V dont le polynôme caractéristique est $\chi_f = -(X-7)^3(X+2)^2$ et le polynôme minimal est $\mu_f = (X-7)^2(X+2)$. Quelles sont les formes normales de Jordan possibles de f ?

Exercice 2. Soit $A \in \mathrm{M}_6(\mathbb{C})$ une matrice **de rang 4** dont le polynôme minimal est $\mu_A = (X^2 - X)(X-2)^2$.

a) Déterminer le spectre $\sigma(A)$.

b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer toutes les formes normales de Jordan possibles pour A et expliciter dans chaque cas les multiplicités géométriques des valeurs propres de A.

Exercice 3. Jordaniser la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Soit $A \in \mathrm{M}_9(\mathbb{C})$ et supposons que $\left\{-\sqrt{3}, 7i\right\} \subset \sigma(A)$ et que les multiplicités généralisées soient données par le tableau suivant

k	1	2	3	4	5
$\delta_{7i}(k)$	2	4	5	5	5
$\delta_{-\sqrt{3}}(k)$	2	4	4	4	4

Trouver la forme de Jordan de A.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de classifier toutes les matrices complexes ou réelles de taille 2×2 à similitude près.

(a) Prouver que toute matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ est ou bien diagonalisable, ou bien semblable à une matrice

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

cette matrice étant uniquement déterminée par A.

(b) Prouver que toute matrice $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ est ou bien diagonalisable, ou bien semblable à l'une des matrices suivantes

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad K = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}.$$

La matrice J ou K étant uniquement déterminée par A.

Exercice 6. Soient V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $n \geq 2$ un nombre entier. Les applications suivantes de V dans $\mathbb{K}$ sont-elles des formes linéaires ?

a) $V = \mathbb{K}^n$, $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_1 \cdot (x_1 - x_2)$.
b) $V = \mathbb{K}^3$, $(x, y, z) \mapsto 5x - y + 4z + 1$.
c) $V = \mathbb{Q}[X]$, $P \mapsto P(a)^2$, où $a \in \mathbb{Q}$ est fixé.
d) $V = \mathbb{F}_2[x]$, $P(x) \mapsto P(a)^2$, où $a \in \mathbb{F}_2$ est fixé.
e) $V = \mathbb{Q}[X]$, $P \mapsto P(a^2)$, où $a \in \mathbb{Q}$ est fixé.
f) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = C^0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt + f(1)$.
g) $V = \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et l'application est $A \mapsto \det(A)$.

Exercice 7. Trouver la base duale de la base $\{(3,2),(2,3)\}$ de $\mathbb{K}^2$.

Exercice 8. On dit que deux matrices carrées $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ sont *congruentes* s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^\top AP$.

1. Montrer que la congruence est une relation d'équivalence.
2. Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles congruentes ?
3. Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Les matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles congruentes ? (La réponse peut dépendre du corps).
4. Est-il vrai que deux matrices congruentes sont toujours semblables ?

Exercice 9. Soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps $\mathbb{K}$ et $\varphi \in V' \setminus \{0\}$ une forme linéaire non identiquement nulle.

(a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est un sous-espace de codimension 1 de V (c'est-à-dire, de dimension $n-1$).
(b) Étant donné un vecteur $u \notin \mathrm{Ker}(\varphi)$, tout vecteur $v \in V$ s'écrit de manière unique $v = v' + a\,u$, où $v' \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $a \in \mathbb{K}$.
(c) Soit $\varphi_1, \varphi_2 \in V'$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) \iff \varphi_1 = b\,\varphi_2$, avec $b \in \mathbb{K}^*$.